9 PROPORCIÓN Y ESTRUCTURAS MODULARES

Fresco egipcio, dinastía XVIII.
Museo egipcio de Turín.

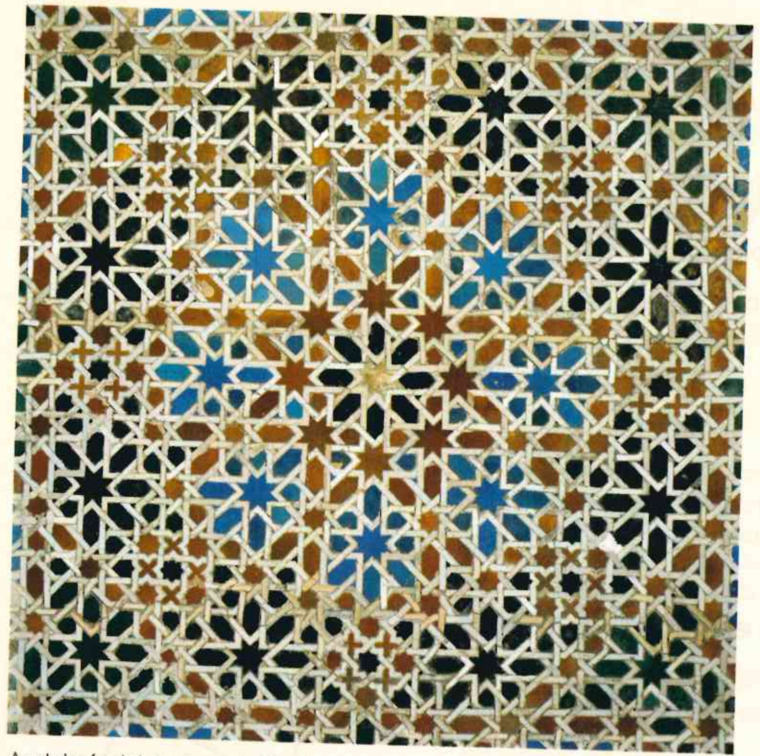
El Greco: *La Adoración de los pastores*, 1612-1614.
Óleo sobre lienzo, 319 x 180 cm.
Museo del Prado, Madrid.

Figuras de la isla de Pascua, Chile.

ANTES DE EMPEZAR

Los artistas, en su afán de encontrar la perfección de las formas, han desarrollado diferentes teorías sobre la belleza, con la finalidad de establecer las *medidas ideales* en la figura humana, en los edificios, en los ornamentos y en general en todos los elementos que componen un conjunto de formas gráficas o espaciales.

La proporción también aparece en las *composiciones modulares*, que se estructuran sobre una red de líneas entrecruzadas y se caracterizan por la repetición y regularidad de los elementos visuales. Estos elementos llamados *módulos*, pueden tener infinitas formas, generalmente derivadas de polígonos y varios tamaños.



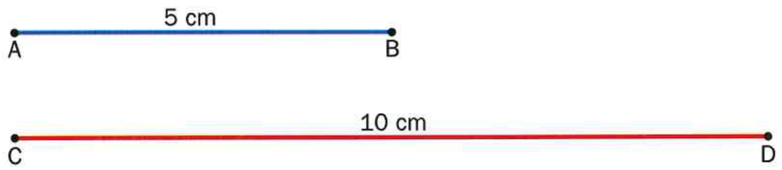
Azulejería del Alcázar de Sevilla, siglo XIV.

- ¿Por qué parece tener una altura excesiva el personaje que aparece a la derecha en el cuadro de El Greco?
- ¿Qué sensación te producen las esculturas de la isla de Pascua, en las que la cabeza ocupa gran parte de su medida? ¿Y las figuras del fresco egipcio?
- ¿Recuerdas otras manifestaciones artísticas en las que aparezcan composiciones modulares similares a las que ves en esta página?

Ieoh Ming Pei: Pirámide del Museo de El Louvre, 1989.
Vidrio, 1250 metros cuadrados. París.

Para establecer una comparación entre dos cantidades se halla la **razón** o cociente entre dichas cantidades. Existen distintas maneras de expresarla. Por ejemplo, la razón entre las medidas de dos segmentos de 5 y 10 centímetros puede expresarse:

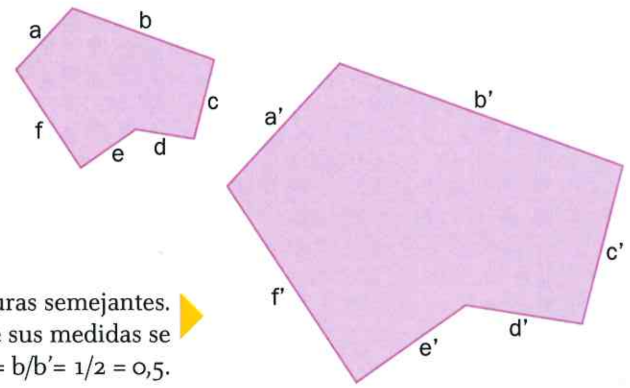
- Mediante dos puntos: 5 : 10
- Mediante la preposición a: 5 a 10
- Mediante una fracción: 5/10
- Mediante una fracción equivalente: 1/2
- Con el resultado del cociente: 0,5
- En forma de porcentaje: 50%



Esto significa que el segmento pequeño está contenido dos veces en el segmento grande o que el segmento pequeño es la mitad que el grande.

Cuando dos figuras tienen **la misma forma**, la razón entre sus medidas es siempre la misma: a/a' = b/b'= c/c' = constante. A la igualdad de dos razones se le llama **proporción**.

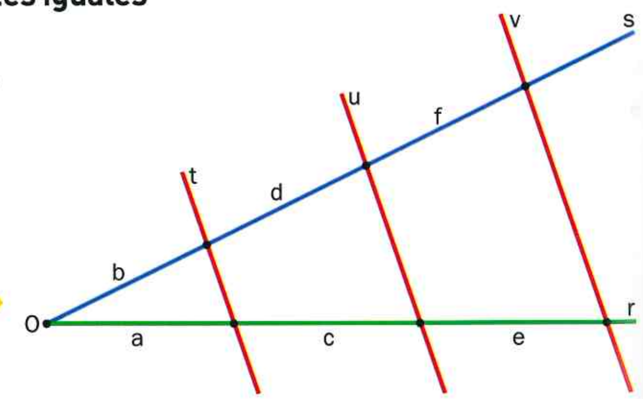
Se dice entonces que las figuras son semejantes y que sus lados correspondientes son **proporcionales** entre sí.



En la imagen puedes ver dos figuras semejantes. Observa cómo la razón entre sus medidas se mantiene constante: a/a' = b/b'= 1/2 = 0,5.

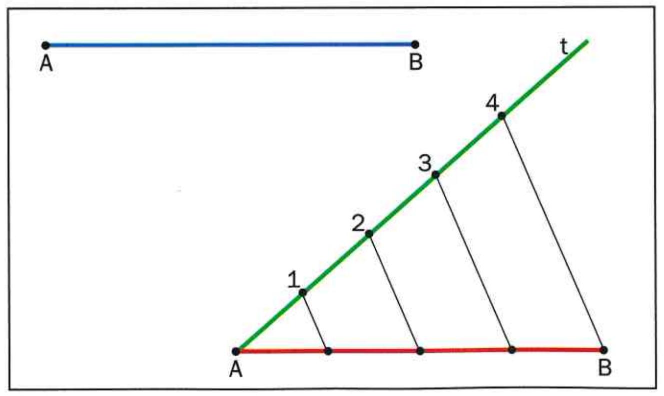
Teorema de Tales: división de un segmento en partes iguales

El **teorema de Tales** afirma que los segmentos determinados por un haz de rectas paralelas sobre otras dos rectas que se cortan son proporcionales.



El teorema de Tales se expresa gráficamente como observas en el dibujo. El haz de rectas paralelas está formado por las rectas *t*, *u* y *v*. Las rectas que se cortan son *r* y *s*. Según Tales a/b = c/d = e/f.

Una de las principales aplicaciones del teorema de Tales es la **división de un segmento en partes iguales**.



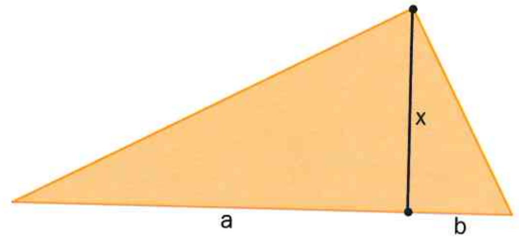
1. Para dividir el segmento $\overline{AB}$ en cuatro partes iguales, se traza desde A una semirrecta *t* en una dirección cualquiera y se marcan cuatro divisiones iguales sobre ella.
2. Desde la marca 4 se traza una recta hasta el extremo B. A continuación, se trazan paralelas a esta recta que pasen por cada una de las marcas.

Teorema de la altura: determinación de la media proporcional

El teorema de la altura de Euclides afirma que en un triángulo rectángulo se verifica la siguiente relación de proporcionalidad:

a/x = x/b, o bien a · b = x^2

Se dice que la altura sobre la hipotenusa es la **media proporcional** de los dos segmentos en que la divide.

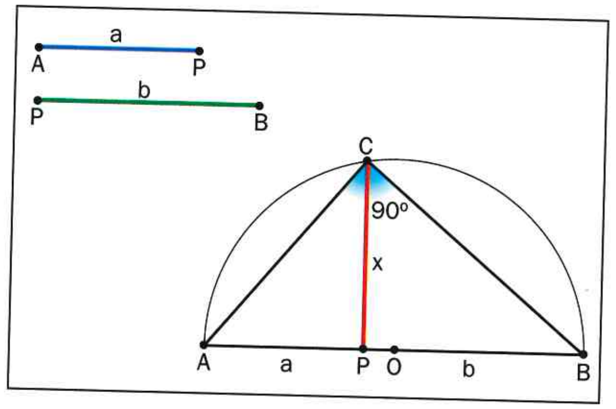


Empleando este teorema, por tanto, podemos determinar gráficamente la **media proporcional de dos segmentos**.

Dados dos segmentos de longitudes *a* y *b*, la media proporcional de ambos *x*, es el segmento que cumple la relación a/x = x/b, o a · b = x^2.

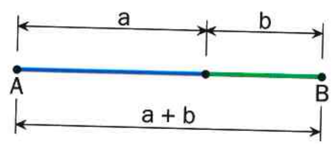
1. Se traza el segmento $\overline{AB}$ = a + b y se encuentra su punto medio O. Con centro en O, se traza la semicircunferencia de radio $\overline{OA}$.
2. Desde P se eleva una perpendicular que corta a la circunferencia en C.

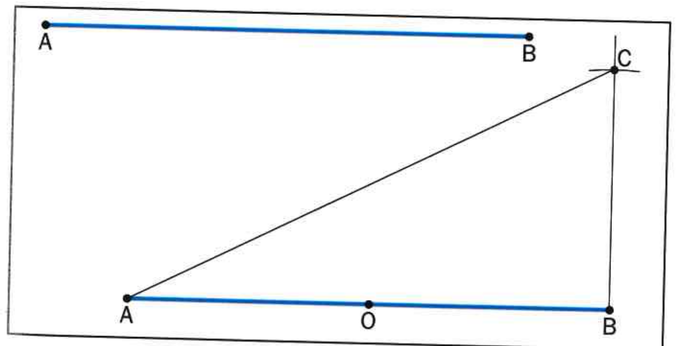
   El triángulo ABC es rectángulo en C y su hipotenusa es a + b. El segmento buscado *x* es $\overline{PC}$, que es la altura sobre la hipotenusa.



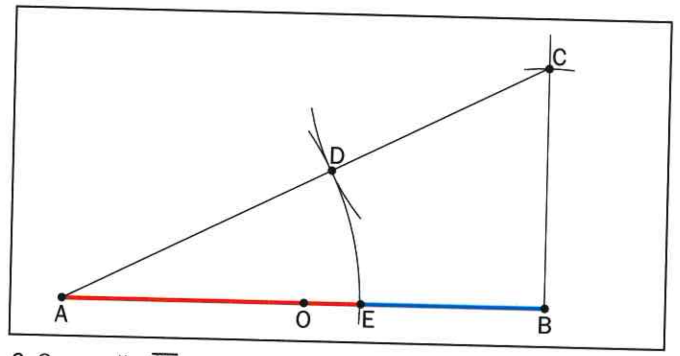
Trazado de la sección áurea de un segmento

Si se divide un segmento $\overline{AB}$ en dos partes *a* y *b*, de modo que se cumpla la relación (a + b)/a = a/b, se obtiene una **proporción áurea** cuya razón **a/b** es conocida como **número áureo θ**, de valor aproximado 1,618.





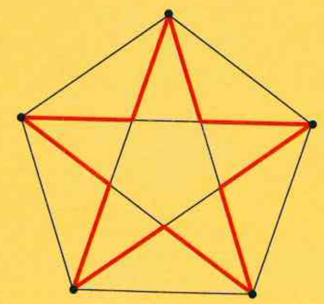
1. Se traza el segmento $\overline{AB}$ y se halla su punto medio O. Por el extremo B se levanta su perpendicular. Con centro en B y radio $\overline{OB}$, se traza un arco que corta a la perpendicular en el punto C, y se une C con A.



2. Con radio $\overline{CB}$, se traza desde C un arco que corte a $\overline{AC}$ en el punto D. Con centro en A y radio $\overline{AD}$ se traza un arco que corte a $\overline{AB}$ en E. Este punto es el que divide al segmento $\overline{AB}$ de modo que $\overline{AE}$ es su sección áurea.

Actividades de observación

1. La sección áurea está presente en el polígono estrellado de cinco puntas. Obsérvalo con atención y señala dónde se manifiesta.



2. RELACIONES DE PROPORCIONALIDAD ENTRE FIGURAS: IGUALDAD

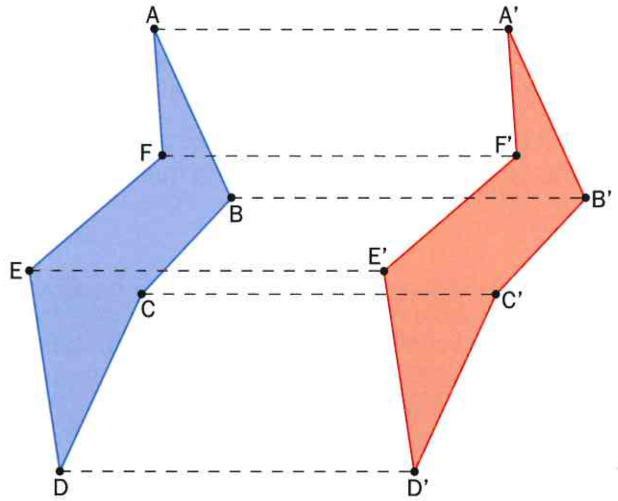
Entre dos figuras se puede establecer una serie de **relaciones proporcionales** atendiendo a su forma, tamaño o disposición en el plano o en el espacio.

La **igualdad** es una de estas relaciones, cuya proporción es 1:1. Decimos que dos figuras son iguales cuando al superponerlas coinciden todos sus lados y ángulos. Para construir una figura igual a otra se pueden seguir diferentes procedimientos: traslación, giro, triangulación, transporte de ángulos y reproducción de coordenadas.

Traslación

Trasladar una figura consiste en desplazar todos sus vértices en sentido recto a una misma distancia.

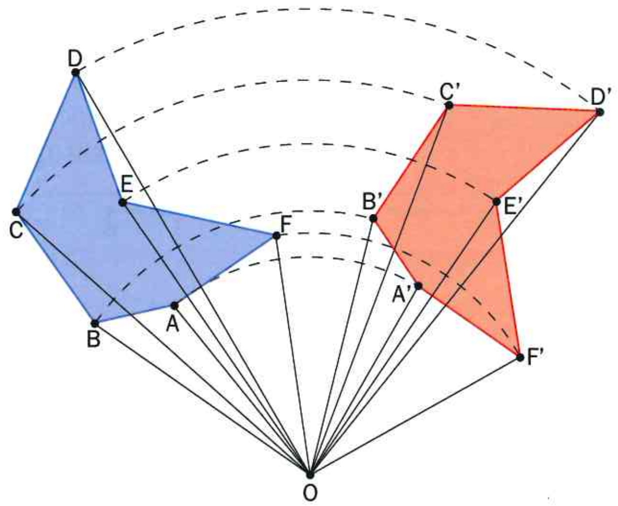
1. Dada la figura ABCDEF se traza una paralela por cada uno de sus vértices. Sobre la recta que contiene al vértice A, se fija a una distancia el punto A'.
2. Se transporta esa misma distancia sobre cada una de las paralelas, de modo que queden fijados los vértices de la nueva figura igual, A'B'C'D'E'F'.
   Los lados correspondientes permanecen paralelos e iguales a los de la figura inicial.



Giro

Girar una figura consiste en desplazar todos sus vértices en sentido circular y con la misma amplitud. Como **centro de giro** se elige un punto cualquiera, O.

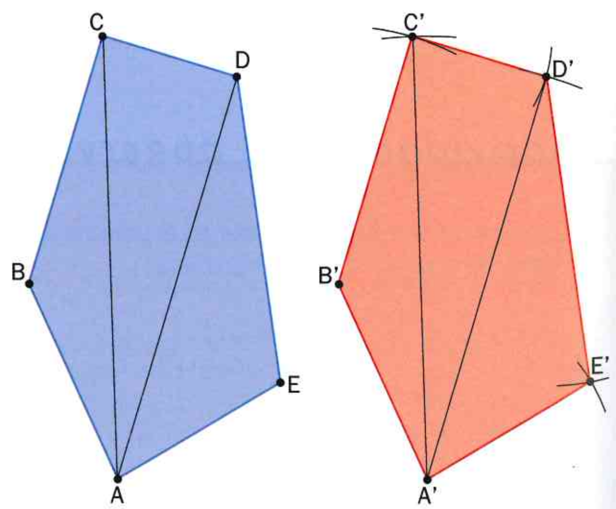
1. A partir de O, se traza un arco por cada uno de los vértices. Sobre el arco que contiene al punto A, se fija una cierta amplitud de ángulo y se determina el vértice A'.
2. Con esa misma amplitud se transportan el resto de los vértices.
   Con este procedimiento, la figura rota alrededor del centro de giro, permaneciendo constante la distancia de cada uno de sus vértices al mismo. En este caso, $\overline{OA} = \overline{OA'}$, $\overline{OB} = \overline{OB'}$... y $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = \widehat{COC'}$...



Triangulación

Triangular una figura consiste en **descomponer su superficie en triángulos** y trazar copias de los mismos. Esto es posible porque el triángulo es el polígono más simple y se puede copiar de manera sencilla.

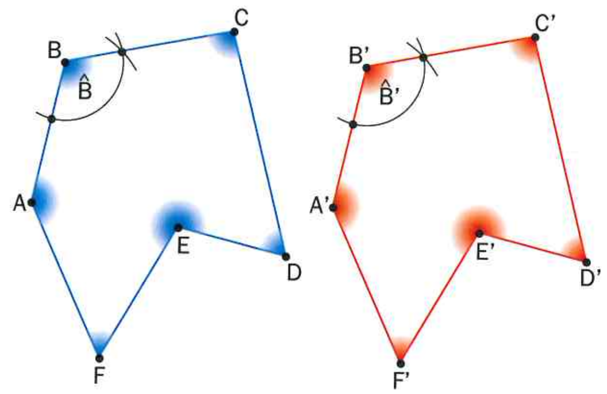
1. Dada una figura ABCDE, se trazan diagonales desde un vértice, por ejemplo el A, de modo que esta quede dividida en triángulos con un vértice común. Para construir la figura igual a la primera, se traza el lado $\overline{A'B'}$, paralelo a $\overline{AB}$.
2. A continuación, se trasladan con el compás las medidas del lado $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, en cuya intersección estará el punto C'. De esta manera se obtiene el triángulo A'B'C', igual al ABC.
3. Se trasladan las medidas del lado $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, reproduciendo sucesivamente todos los triángulos de la figura inicial y completando la figura A'B'C'D'E'.



Transporte de ángulos

Este procedimiento consiste en **transportar cada ángulo** de la figura dada para construir una figura igual.

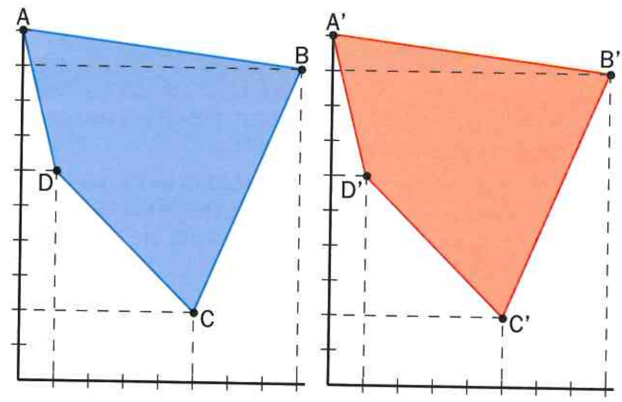
1. Dada la figura ABCDEF, se dibuja el lado $\overline{A'B'}$ con la misma medida que $\overline{AB}$. En B' se construye con el compás un ángulo igual al $\hat{B}$.
2. Sobre su lado se transporta, también mediante el compás, el lado $\overline{BC}$, de modo que se obtiene el nuevo lado $\overline{B'C'}$.
3. Al repetir el procedimiento con el resto de ángulos y lados, se va construyendo la figura A'B'C'D'E'F'.



Reproducción de coordenadas

Los **ejes de coordenadas** son dos rectas perpendiculares que permiten asignar a cada punto del plano dos coordenadas. Este procedimiento consiste en **reproducir las coordenadas** de la figura inicial sobre otros ejes.

1. Dada una figura ABCD, se dibujan dos ejes de coordenadas y se trazan perpendiculares a los mismos desde todos los vértices de la figura. De este modo, se averiguan las coordenadas de cada uno de ellos.
2. Para dibujar la figura igual a la dada, se trasladan los ejes y se reproducen las mismas coordenadas, estos puntos serán los nuevos vértices de la figura A'B'C'D'.



Manifestaciones artísticas de la igualdad

Algunas composiciones artísticas están basadas en la repetición de figuras iguales, siendo también un recurso muy utilizado en la ornamentación, el diseño gráfico y la arquitectura.

Observa la sucesión de figuras iguales en esta composición pictórica. La finalidad de este recurso estructural es producir un efecto de homogeneidad visual.

Jean Arp: *La plancha de huevos*, 1922.

Actividades de observación

2. Observa en el friso de la imagen la igualdad de las figuras. Busca en tu ciudad diferentes ejemplos de conjuntos ornamentales, ejemplos arquitectónicos y diseños urbanos que se basen fundamentalmente en la repetición de sus elementos estructurales.

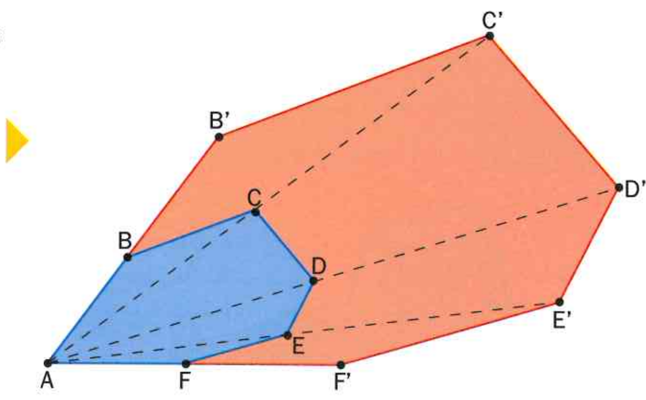
Semejanza

La **semejanza** es una relación entre figuras en la que los ángulos correspondientes de las mismas son iguales, y sus lados correspondientes, proporcionales. Se pueden obtener figuras semejantes utilizando los siguientes procedimientos.

- **Radiación desde un vértice**. En este procedimiento las dos figuras tienen un vértice común.

1. Dada una figura ABCDEF, se elige el vértice A, y desde él se trazan rectas que pasen por los demás vértices.
2. Se sitúa un punto B' en la prolongación del lado $\overline{AB}$. Por el punto B' se traza una paralela al lado $\overline{BC}$, hasta cortar a la prolongación de $\overline{AC}$ en C'.
3. A partir de él, se repite la misma operación hasta completar la figura semejante.

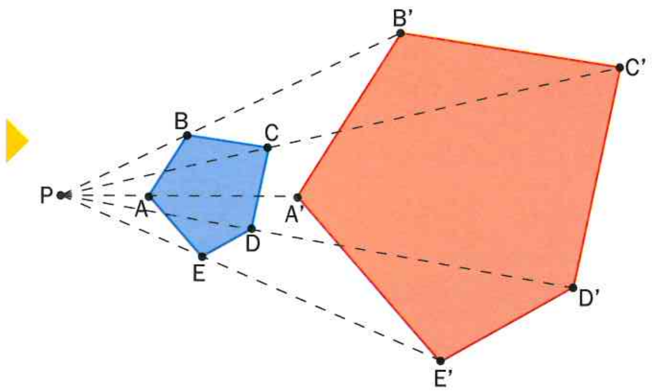
   Comprueba que se establece la proporción entre los lados: $\overline{AB}/\overline{AB'} = \overline{BC}/\overline{B'C'} = \overline{CD}/\overline{C'D'} = \overline{DE}/\overline{D'E'} = ...$



- **Radiación desde un punto exterior**. En este caso, cambia la situación del punto y a partir del mismo, se construyen los vértices de la figura semejante.

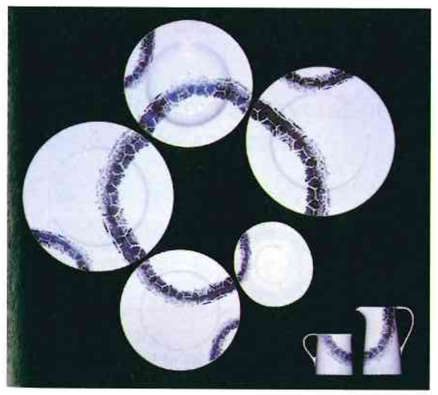
1. Se elige un punto P exterior a la figura y desde él se trazan rectas que pasen por los vértices de esta.
2. Sobre la prolongación de una recta, la que pasa por el punto A, se marca el punto A'. Por A' se traza un segmento $\overline{A'B'}$ paralelo al lado $\overline{AB}$.
3. Repitiendo la misma operación con todos los lados se obtendrá la figura semejante.

   Observa que se establece la proporción: $\overline{AB}/\overline{AB'} = \overline{BC}/\overline{B'C'} = \overline{CD}/\overline{C'D'} = ...$



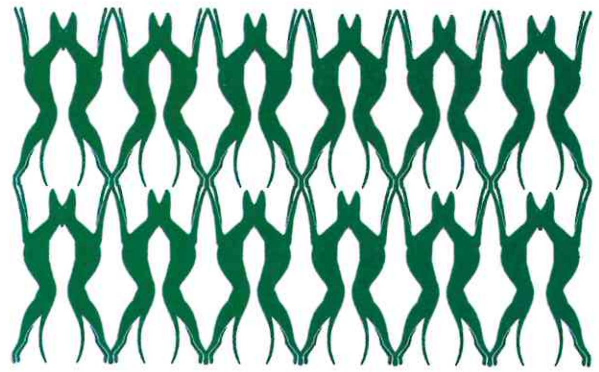
Aplicaciones en la expresión plástica

Como ocurre con la igualdad, **la simetría y la semejanza** se pueden utilizar como recursos para realizar obras artísticas y estructuras arquitectónicas, ornamentales y de diseño.



Esta fotografía se basa en un juego de formas circulares semejantes que producen una ligera sensación de movimiento.

Pau Giralt-Miracle: *Vajilla*, 2000.



Este anuncio publicitario de papel presenta una estructura simétrica que simplifica el recorrido visual del observador.

Actividades de observación

3. Busca en diferentes publicaciones ejemplos fotográficos de formas naturales y artificiales que presenten simetrías, y clasifícalas según su clase.

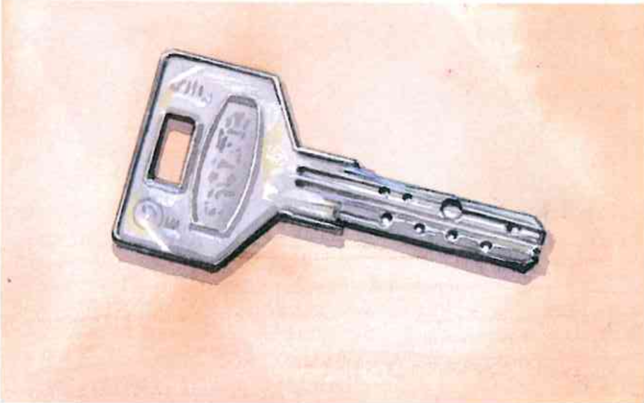
4. ESCALAS

Una **escala** es la relación entre la longitud de un segmento representado y la longitud que este tiene en la realidad. Se expresa mediante un cociente o razón entre las medidas del dibujo y las de la realidad:

Escala = Medidas del dibujo : Medidas de la realidad

Cuando el dibujo mide lo mismo que el objeto real, se dice que está representado a **escala natural**; si es más pequeño que el objeto real, se dice que está a **escala de reducción**, y si es mayor, a **escala de ampliación**.

Escala natural

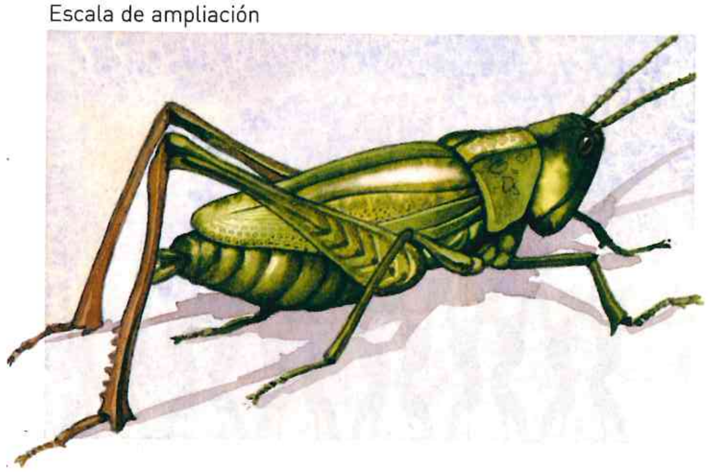


La llave está dibujada a escala natural, esto es, una unidad del dibujo representa una unidad en la realidad.

Escala de reducción

Esta avioneta está realizada a una escala de reducción 1:100. Cada centímetro en el dibujo equivale a 100 centímetros en la realidad.

Escala de ampliación



Este insecto está dibujado a una escala de ampliación 5:1. Cinco unidades del dibujo representan una unidad en la realidad.

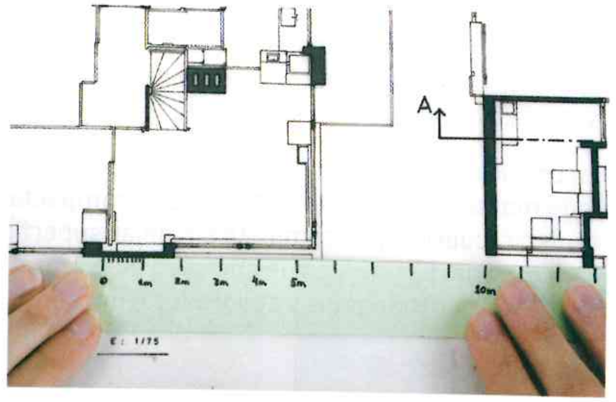
Escalas normalizadas

Según los objetos o figuras que se quieran representar, se aplican diferentes escalas. Observa en esta tabla las escalas más utilizadas en distintos campos del dibujo técnico.

ESCALAS DE REDUCCIÓN				ESCALAS DE AMPLIACIÓN
Fabricación e instalaciones	Construcciones civiles	Topografía	Urbanismo	
1:2,5	1:5	1:100	1:500	2:1
1:5	1:10	1:500	1:2 000	5:1
1:10	1:50	1:1 000	1:5 000	10:1
1:50	1:100	1:5 000	1:25 000	
1:100	1:500	1:10 000	1:50 000	
1:200	1:1 000	1:50 000		

Escalas gráficas

Una **escala gráfica** es una especie de regla graduada que se construye para poder trabajar fácilmente en una escala determinada, sin tener que realizar ninguna operación matemática previa. Se denominan también **escalas volantes**.



Observa en la fotografía cómo se emplea una escala gráfica para poder medir la planta trazada a escala 1:75.

Para construir una escala gráfica hay que definir las unidades más adecuadas para cada caso. Por ejemplo, para dibujar a escala 1:20 es conveniente usar metros; para dibujar a escala 1:1 000 000, se usan kilómetros o para dibujar a escala 10:1, se usan centímetros.

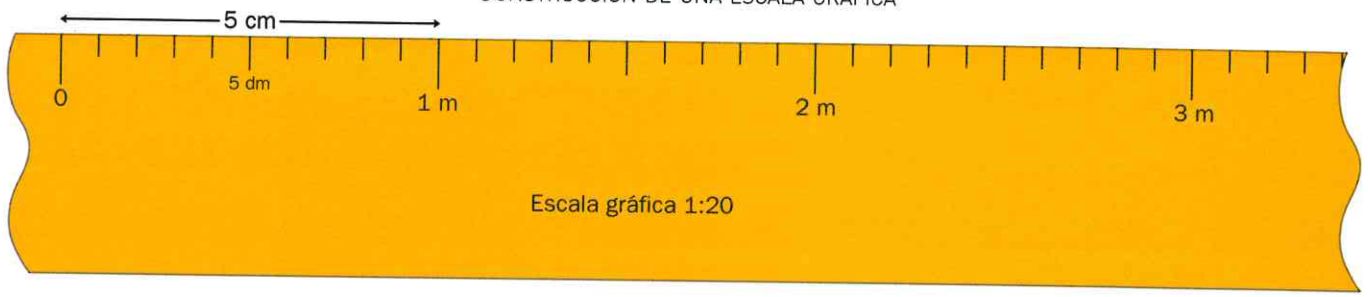
A continuación vamos a construir una escala gráfica 1:20, para ello tenemos que calcular primero cuántos centímetros de nuestra escala gráfica equivalen a 1 metro en la realidad:

$$\frac{1}{20} = \frac{x \text{ metros en la gráfica}}{1 \text{ metro en la realidad}}; \; x = 0{,}05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$$

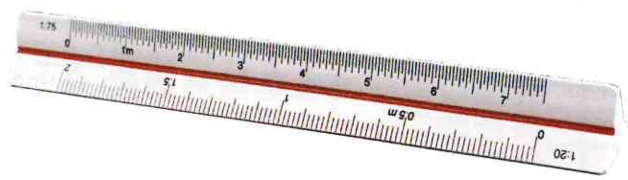
Lo que significa que 5 centímetros en el dibujo representan 1 metro en la realidad.

Sobre una tira de papel dibujamos una recta sobre la que llevaremos los 5 centímetros unas 3 veces. Además podemos construir sobre la escala gráfica una **contraescala**, para ello, subdividimos en 10 partes cada división para poder medir los decímetros correspondientes.

CONSTRUCCIÓN DE UNA ESCALA GRÁFICA



Los **escalímetros** son reglas graduadas que llevan impresas en sus caras distintas escalas gráficas.



En este escalímetro se aprecian dos escalas, una 1:20 y otra 1:75.

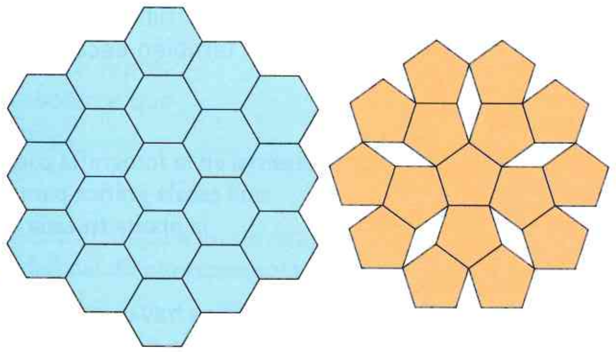
Actividades de observación

4. Sabiendo que el segmento de la derecha mide en la realidad 10 metros, determina la escala a la que está dibujado.

5. Selecciona fotografías de objetos o envases que puedas comparar con la realidad: un teléfono, un bolígrafo, un envase de leche, etc., y determina la escala que relaciona las fotografías con la realidad.

Las **redes modulares** son estructuras, generalmente geométricas, que permiten relacionar figuras iguales o semejantes, llamadas **módulos**, en una misma superficie.

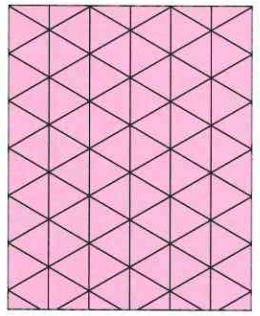
La condición fundamental que debe cumplir la estructura de toda malla o red modular es que debe **compactar el plano**, es decir, cubrirlo por completo sin dejar superficies vacías intermedias. Las redes que cumplen este requisito son las formadas por triángulos y cuadrados o derivados de estos.



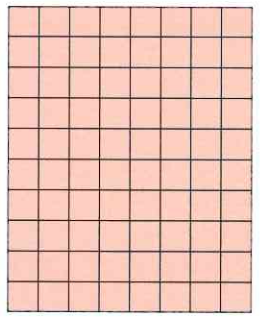
Los hexágonos, derivados del triángulo, compactan el plano, mientras que los pentágonos dejan superficies vacías.

Redes modulares simples

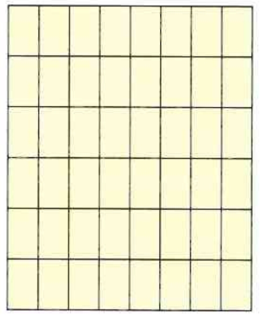
Las **redes modulares simples** están formadas por la repetición de una sola figura. Además de las redes triangulares y cuadradas básicas, existen otras con distintas peculiaridades: rectangulares, quebradas, romboides, etc.



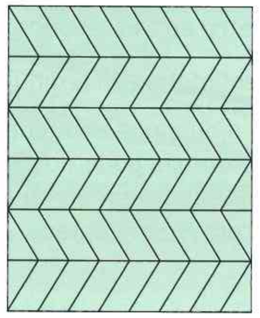
Triangular



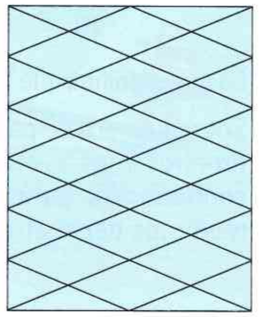
Cuadrada



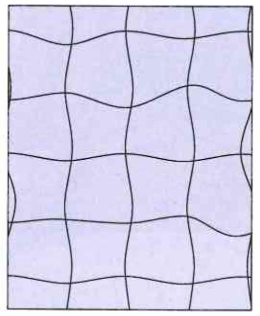
Rectangular



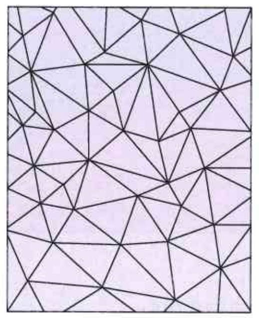
Quebrada



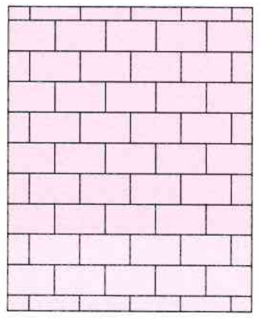
Romboide



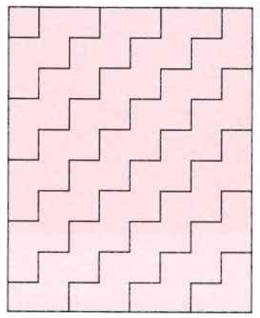
Deformada



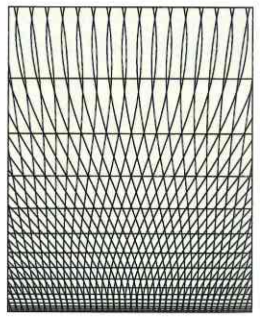
Irregular



Enladrillada

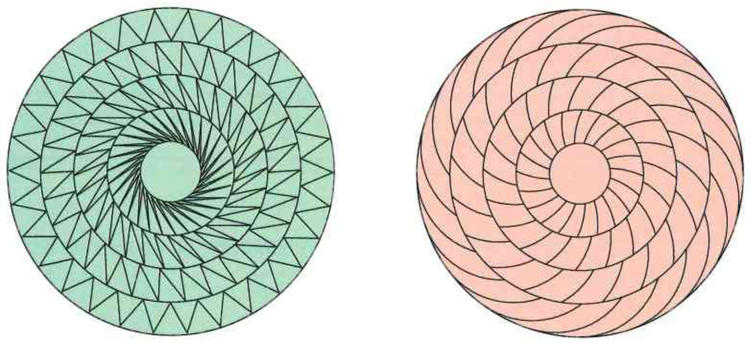


Escalonada



En gradación

Existe otro tipo de red simple, basada en una red en gradación. Es la **red radiada**, que va creciendo desde el centro de una circunferencia y apoyándose ordenadamente en los radios.

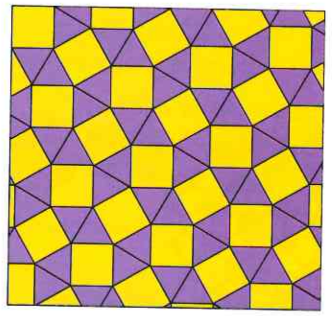


Redes radiadas

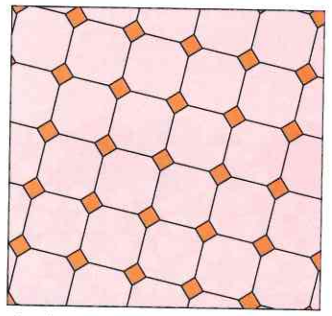
Redes modulares compuestas

Las **redes modulares compuestas** se forman por la **yuxtaposición** de varias figuras geométricas regulares o por la **superposición** de dos o más redes simples.

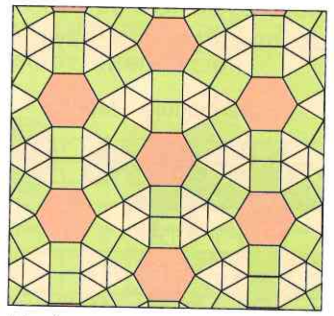
En los siguientes ejemplos puedes ver combinaciones sencillas de redes modulares compuestas por **yuxtaposición de polígonos regulares**.



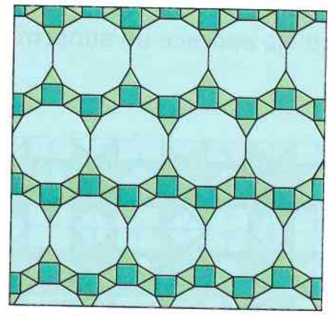
Cuadrados y triángulos equiláteros



Octógonos y cuadrados

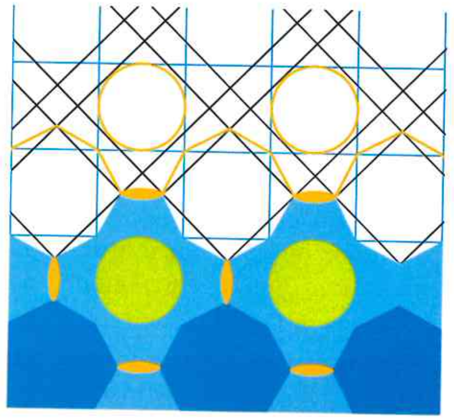


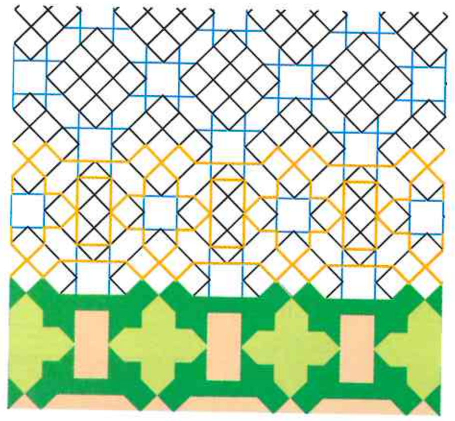
Hexágonos, cuadrados y triángulos equiláteros

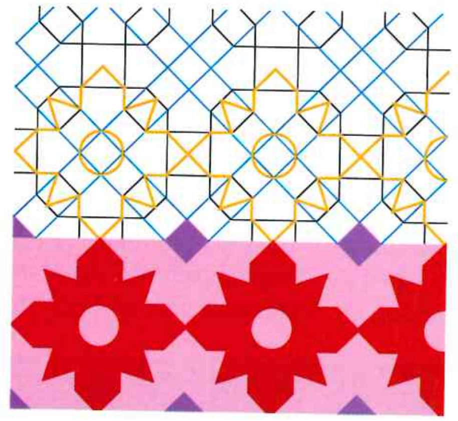


Dodecágonos, cuadrados y triángulos equiláteros

Observa estos ejemplos de redes modulares compuestas por **superposición de redes simples**.



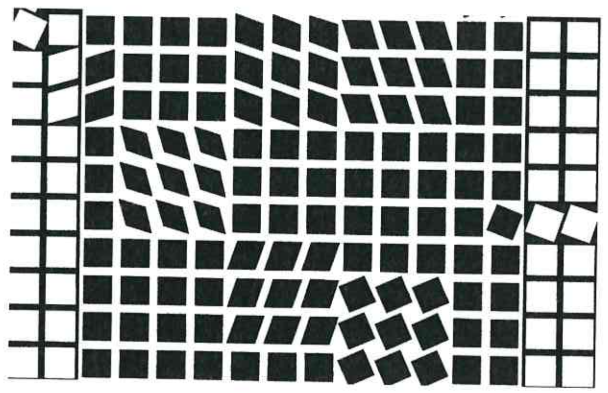




Anomalías

La **anomalía** es un recurso plástico que consiste en una desviación o variación irregular de algún elemento visual dentro de una red modular en la que prevalece la regularidad. Las anomalías pueden darse por cambio de forma, tamaño o dirección.

El objetivo principal de las anomalías es **atraer la atención** para aliviar la monotonía de la repetición.



En este dibujo puedes ver distintas anomalías que dan mayor dinamismo a la composición.

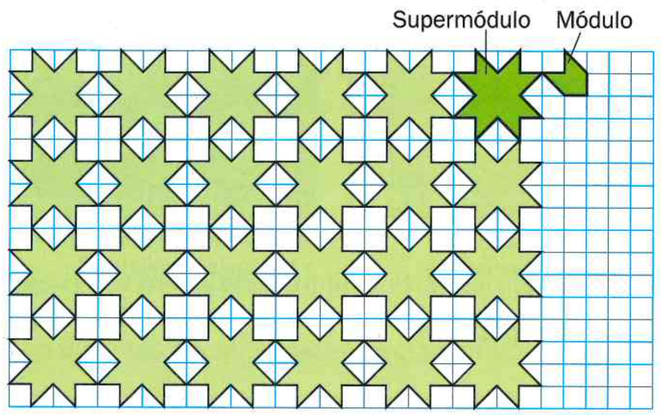
Actividades de observación

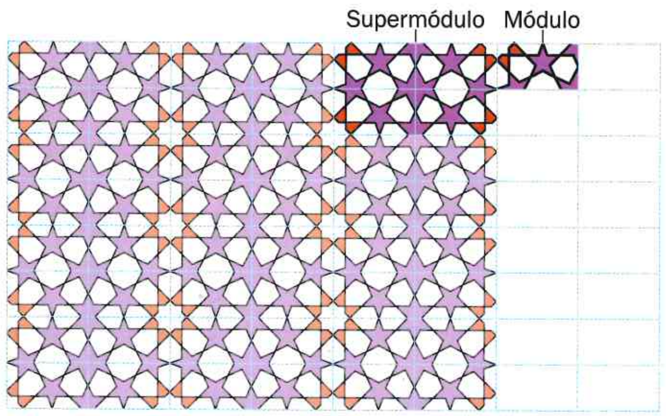
6. Selecciona, en revistas o periódicos, tres ejemplos de dibujos o fotografías que reproduzcan algunas de las estructuras de redes que has estudiado en este epígrafe.

7. Sobre un papel cuadriculado, dibuja una estructura modular simple en la que se aprecien anomalías. Compáralas con las descritas en esta página.

El **módulo** es la figura básica que se repite en las estructuras modulares. La combinación proporcionada de varios módulos sobre una red o trama da lugar a la composición modular.

El módulo puede tener una apariencia sencilla y fácil de aislar visualmente, o bien estar formado por fragmentos de trazados que se extienden más allá de la casilla de la red; en este caso, es más laborioso individualizar su forma. Cuando se combinan varios módulos básicos para formar una figura más compleja aparece un **supermódulo**, que atrae con mayor fuerza nuestra atención.

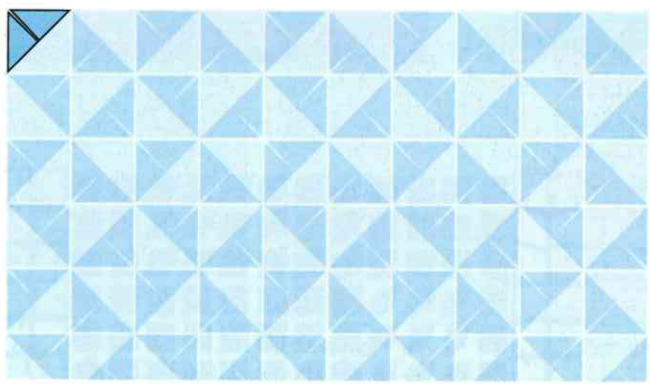




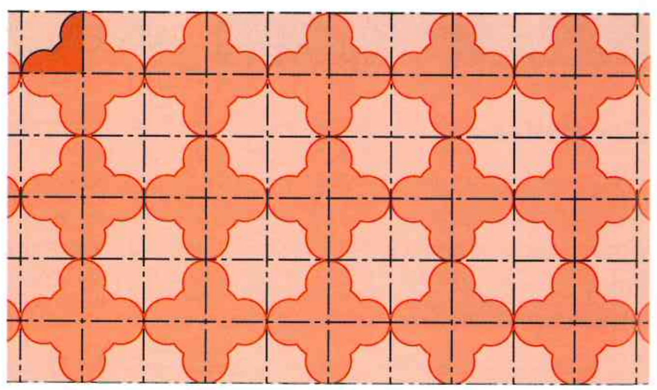
Observa cómo en estas composiciones se ha extraído el módulo a partir del supermódulo.

Movimientos del módulo

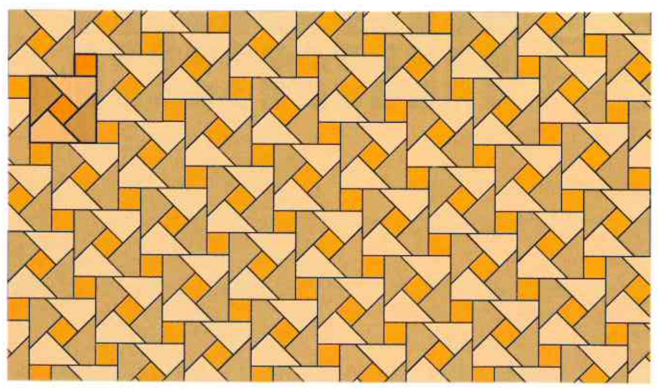
Un módulo se puede colocar y combinar en distintas posiciones para dinamizar el ritmo de una composición. Entre los movimientos más usuales destacan el **giro** y el **desplazamiento**. Aplicando el giro se pueden llegar a situar los módulos en contraposición, es decir, formando una **simetría**.



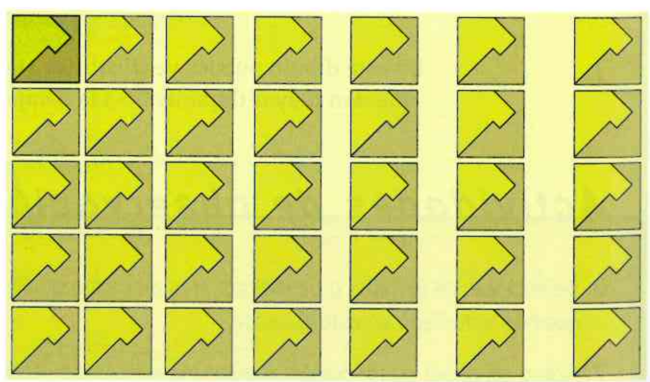
Giro



Giro con simetría



Desplazamiento de las casillas

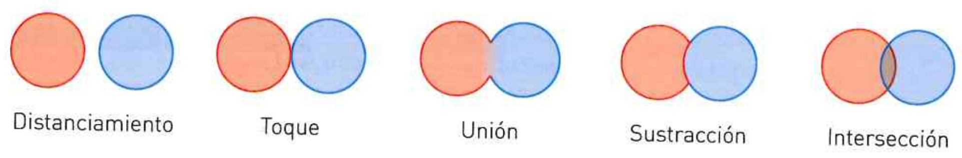


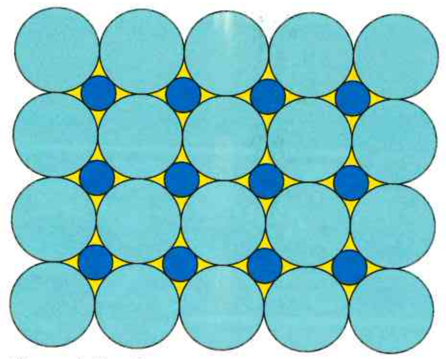
Desplazamiento variando el espacio entre casillas

La circunferencia en la composición modular

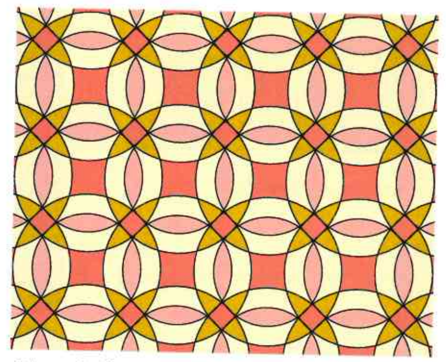
La **circunferencia** es una figura que no puede compactar el espacio, al igual que el pentágono, por lo que no hay redes modulares circulares. Sin embargo, inscribiéndola en cuadrados, se utiliza como estructura para diseñar módulos, dejando los espacios libres como formas de apoyo.

Los centros de las circunferencias se sitúan en **disposición lineal**, y los módulos pueden aparecer en diferentes posiciones, que dan lugar a diferentes relaciones entre ellas: **distanciamiento**, **toque**, **unión**, **sustracción** o **intersección**.

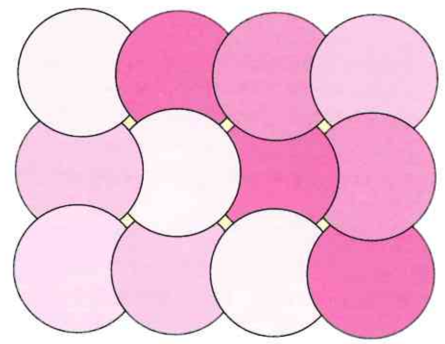




Disposición lineal con toque

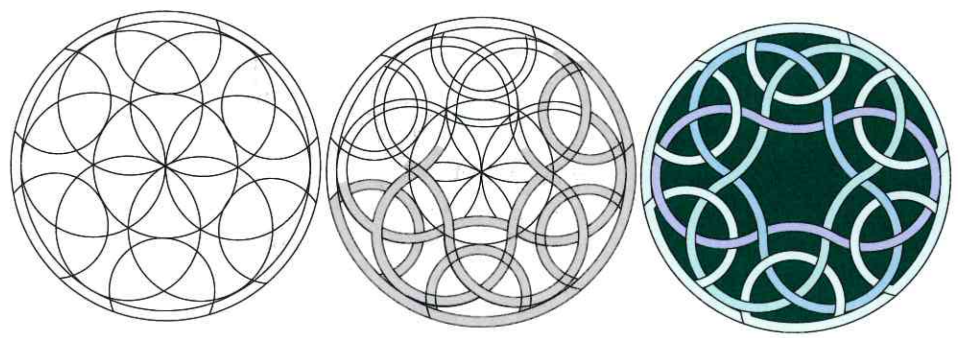


Disposición lineal con intersección



Disposición lineal con sustracción

Los **entrelazados** son un caso especial de intersección en los que el módulo se obtiene conservando ciertas líneas y eliminando otras.

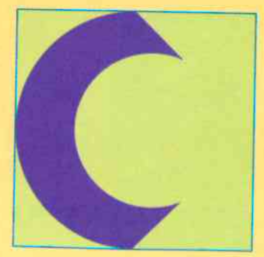


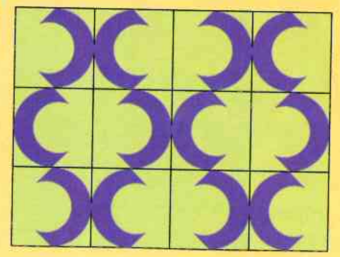
Observa en este ejemplo cómo se va formando el entrelazado borrando algunas líneas de la estructura.

Actividades de observación

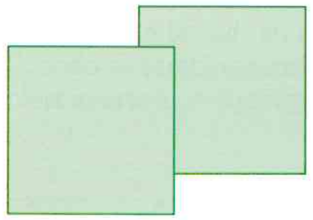
8. Los módulos pueden diseñarse con formas orgánicas adaptadas a las estructuras geométricas. Busca en periódicos, revistas o libros de arte composiciones modulares cuyos módulos no sean geométricos.

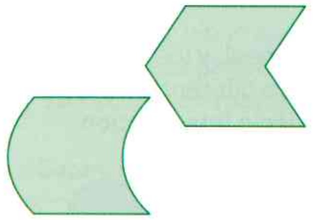
9. Recorta diez módulos en cartulina de color, calcando el del ejemplo, y combínalos sobre una red modular cuadrada, cada uno con un giro libre. Luego vuélvelos a girar para observar los distintos efectos visuales que se pueden producir.

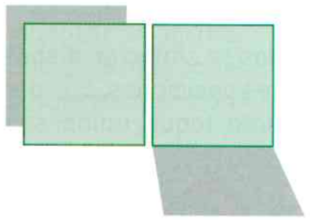


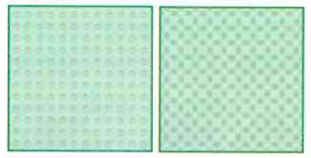


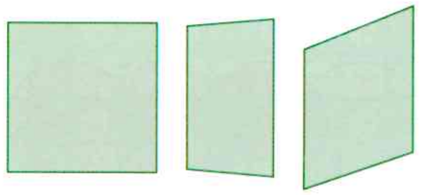
Como en cualquier expresión visual, en la composición modular se pueden **crear sensaciones de espacio tridimensional** utilizando diferentes recursos gráficos: superposición, curvatura o doblez, agregado de sombra, cambio de textura, cambio del punto de vista, cambio de tamaño y cambio de valor o color.

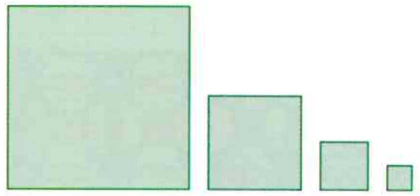

Superposición


Curvatura o doblez


Agregado de sombra

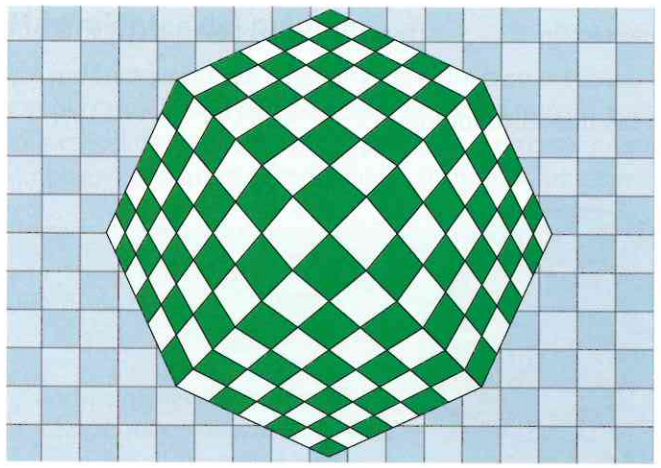

Cambio de textura

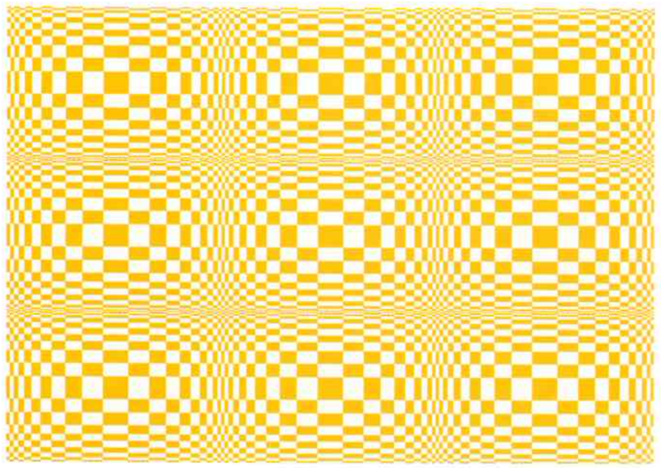

Cambio del punto de vista

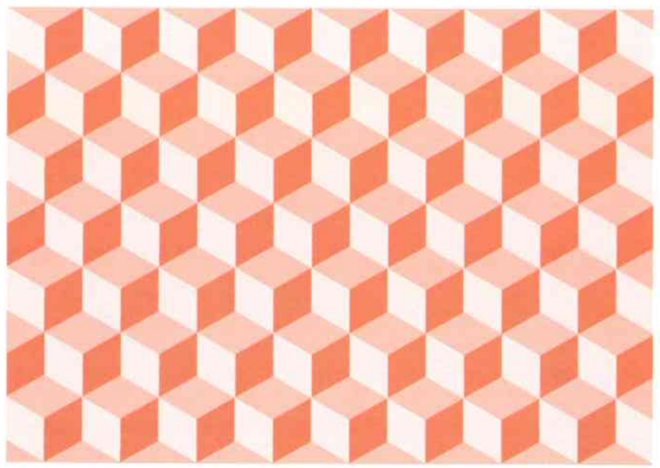

Cambio de tamaño

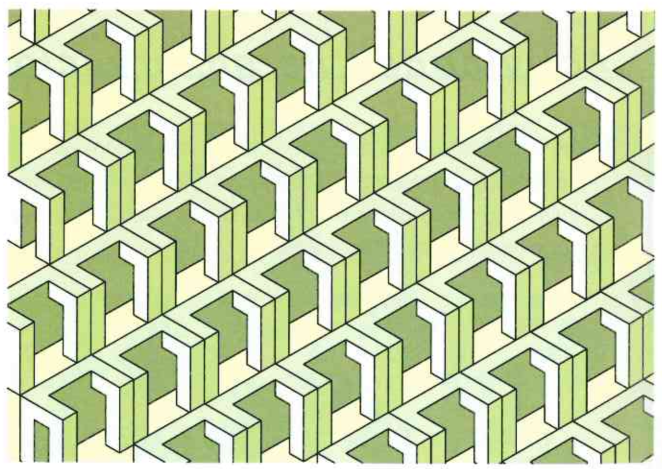

Cambio de valor

Observa en estos ejemplos la sensación tridimensional producida al combinar estos recursos.


Composición tridimensional con cambio del punto de vista


Composición tridimensional con cambio de tamaño


Composición tridimensional con cambio del punto de vista y agregado de sombra

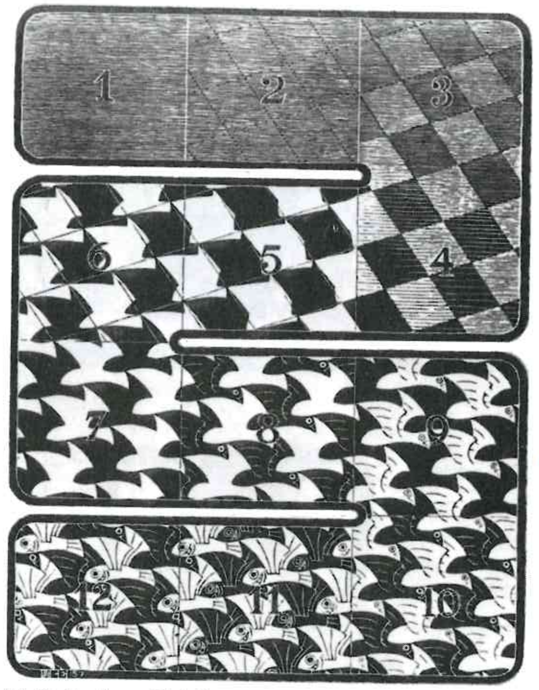

Composición tridimensional con efecto de superposición, doblez y agregado de sombra

Transformaciones del módulo

Un aspecto muy interesante de la composición modular es la posibilidad de **transformar el módulo** hasta conseguir un dibujo totalmente distinto del primero, sin perder la estructura de la red básica.

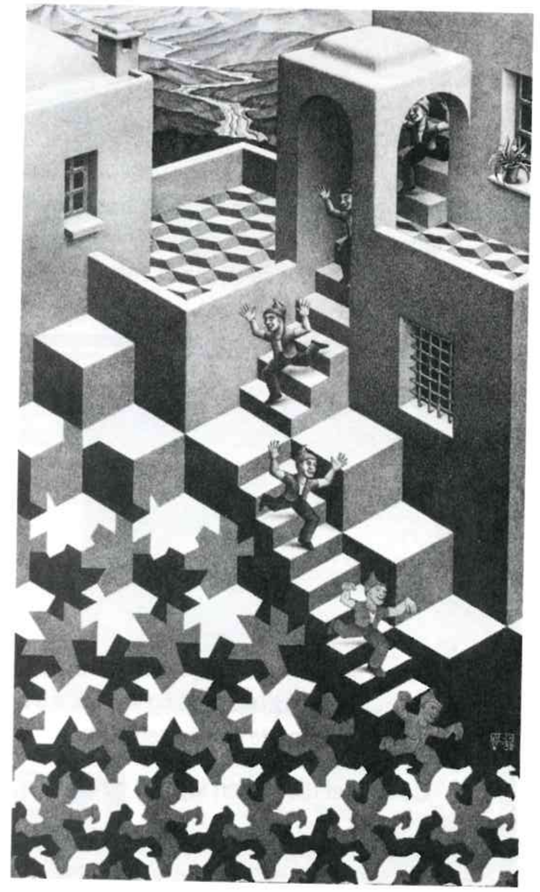
A partir de un módulo en dos dimensiones se puede llegar mediante diversas transformaciones a módulos que sugieren **tridimensionalidad**.

Observa este dibujo basado en una red modular triangular formando hexágonos. Los módulos que comienzan con una estructura bidimensional se transforman para construir la perspectiva de las edificaciones de la parte superior.



M. C. Escher: *División regular del plano I*, 1957.

En este dibujo se ha empleado el recurso de la transformación comenzando con formas geométricas y terminando con formas orgánicas.


M. C. Escher: *Ciclo*, 1938.

Actividades de observación

10. Las estructuras modulares, como la de las casillas de los panales de miel, se dan en otras manifestaciones de la naturaleza. Cita ejemplos de elementos naturales que presenten una estructura modular.

11. Busca en revistas o libros de arte composiciones modulares con efecto tridimensional y comprueba qué clase de recurso gráfico se emplea de los estudiados en este epígrafe.